

SEMAINE 28 DU 25/05/2026

1 PROGRAMME OFFICIEL

a) Convergence et divergence	
Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Reste d'une série convergente.	
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbf{C}$.	
b) Séries à termes positifs ou nuls	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n , la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.	
Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	
Séries de Riemann.	Application à l'étude de sommes partielles.

c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

Une série numérique absolument convergente est convergente.

Le critère de Cauchy est hors programme.

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de \mathbf{R}^+ , si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

d) Théorème des séries alternées

Si la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.

e) Familles sommables de nombres réels positifs

Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$. Borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

Somme d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum_{i \in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I .

La somme est notée $\sum_{i \in I} u_i$.

Cas où I est fini, où $I = \mathbf{N}$ (lien avec les séries). On note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ si la série

$\sum u_n$ d'éléments de \mathbf{R}^+ diverge.

Invariance de la somme par permutation.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de \mathbf{R}^+ est dite sommable si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.

Opérations : somme, multiplication par un réel positif.

Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$ et si $(u_i)_{i \in I}$ est à valeurs dans \mathbf{R}^+ , alors

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i.$$

La démonstration est hors programme.

Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.

f) Familles sommables de nombres complexes

La famille $(u_i)_{i \in I}$ de \mathbf{C}^I est dite sommable si $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$.

Somme d'une famille sommable de nombres complexes.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes et soit (v_i) une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i \in I$, $|u_i| \leq v_i$. Alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

Linéarité de la somme.

Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$, si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i.$$

Cas où I est un produit : théorème de Fubini.

Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_{i'})_{i' \in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i, i') \in I \times I'}$ est sommable et

$$\sum_{(i, i') \in I \times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{i' \in I'} b_{i'}.$$

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Notation $\ell^1(I)$.

Pour $I = \mathbf{N}$, lien avec les séries.

Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable.

Si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et si $\varepsilon \in \mathbf{R}^{+*}$, il existe une partie finie F de I telle que

$$\left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in F} a_i \right| \leq \varepsilon.$$

Invariance de la somme par permutation.

La démonstration est hors programme.

Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.

On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbf{C}, +)$ dans (\mathbf{C}^*, \times) .

2 EXERCICES DE COURS

Pas de question de cours cette semaine.

3 EXERCICES DE RECHERCHE

Séries, familles sommables.