Semaine 06 du 02/11/2026

1 Programme officiel

Les éléments en italique sont des ajouts ou précisions personnels, hors programme officiel.

c) Inégalités

Relation d'ordre sur **R**. Compatibilité avec les opérations.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
	Lien entre inégalités et monotonie (large ou stricte), passage aux antécédents.
Parties positives et négatives.	
Valeur absolue. Inégalité triangulaire *et son corollaire*.	
Dans **R**, parties majorées, minorées, bornées.	
Majorant, minorant ; maximum, minimum.	
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.

a) Ensemble des nombres usuels

Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de **R**) sont hors programme.
Tout intervalle ouvert non vide rencontre **Q** et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.	
Droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$.	

b) Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de **R**.	Notation $\sup X$, $\inf X$.
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de **R** admet une borne supérieure (resp. inférieure).	
Une partie X de **R** est un intervalle si, et seulement si pour tous a, $b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	

2 Question de cours 1 :

1) Soit $a > 0$. Montrer que la relation de congruence modulo a est une relation d'équivalence sur **R**.
2) Montrer que la relation de divisibilité est une relation d'ordre *partielle* sur **N**.
3) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
4) Soit $n \geqslant 1$, soit $x \in \mathbf{R}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor$. *On admet le point précédent.*
5) Soient A et B deux parties de **R** non vides et minorées. Montrer que $\inf(A \cup B)$ existe dans **R** et donner son expression à partir de $\inf(A)$ et $\inf(B)$.
6) Preuve de l'inégalité triangulaire sur **R** et son corollaire.
7) Preuve de l'inégalité triangulaire sur **C** et son corollaire.

3 Question de cours 2 :

Preuve de la formule du binôme de Newton.

Exercice 1 (CCINP 84)

1) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans **C** de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3) En déduire, pour $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, les solutions dans **C** de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 2 (CCINP 89)

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1) On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2) On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} \left| z^k - 1 \right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

4 Exercices :

Réels, relations d'ordre, résolution d'équations ou d'inéquations, révision sur les sujets des semaines précédentes.