

SEMAINE 02 DU 21/09/2026

1 PROGRAMME OFFICIEL

Les éléments en italique sont des ajouts ou précisions personnels, hors programme officiel.

1.1 Sommes et produits

a) Sommes et produits		
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels <i>ou complexes</i> .	Notations $\sum_{i \in I} a_i, \sum_{i=1}^n a_i, \prod_{i \in I} a_i, \prod_{i=1}^n a_i$. Cas où I est vide.	
Sommes et produits télescopiques, exemples de changement d'indice et de regroupements de termes <i>La notion de recouvrement disjoint a été donnée.</i>	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension. <i>Translation, inversion de l'ordre de sommation.</i>	
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^n k, \sum_{k=1}^n k^2, \sum_{k=1}^n x^k$. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.	<i>Égalité de Bernoulli, présentée sous la forme</i> $\forall (a, b) \in \mathbf{C}^2, \forall n \in \mathbf{N},$ $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$ $= (a - b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k.$	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies	Exemples de sommes triangulaires, <i>pas de produits de Cauchy.</i>	
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k < 0$ ou $k > n$. <i>Les coefficients binomiaux sont entiers.</i> <i>Formule du triangle de Pascal.</i>	
Formule du binôme de Newton dans $\mathbf{R}$	<i>et dans $\mathbf{C}$.</i>	

Question de cours 1 :

- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)},$
- $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k,$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j},$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j),$
- $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}.$
La dernière somme peut se faire avec une fonction polynomiale ou la formule « sans nom » (au choix de l'interrogateur).
- preuve de la formule de Bernoulli, du triangle de Pascal, du binôme de Newton.

Question de cours 2 : Pour l'une des propriétés suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et le prouver formellement.

- $\forall f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, f(x) = y.$
- $\forall f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = y.$
- $\forall f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(x) = y.$
- $\forall f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(x) = y$

Question de cours 3 :

- 1) $\sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}.$
- 2) $(a + b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow (a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \text{ ou } b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}).$
- 3) $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, (\forall n \in \mathbf{N}, a2^n + b3^n = 0) \iff (a = b = 0).$
- 4) Toute fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- 5) Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

2 EXERCICES

En priorité sur la manipulation technique des sommes, mais ne pas hésiter à y ajouter des suites usuelles ou la récurrence.

Pas d'exercice de logique (ou « raisonnement ») cette semaine.